n 次正方行列 A についての定理「$XA = I \Leftrightarrow AX = I$」の初等的証明 [1)]

概要

n 次正方行列 A について，行列式 $|A|\ (\neq 0)$ および A の $(i,\ j)$ 余因子 A_{ij} を考えます．（余因子 A_{ij} は A の行列式 $|A|$ の第 i 行と第 j 列を除いて得られる $n-1$ 次の小行列式 M_{ij} に符号因子 $(-1)^{i+j}$ をつけたものです）．よく知られた行列式の性質のみを用いて，余因子 A_{ij} は，（符号因子がつかない）行列式 $|A|$ において，（ア）その j 列を i 行が 1 の単位**列**ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ で置き換えたもの，または（イ）その i 行を j 列が 1 の単位**行**ベクトル $\boldsymbol{e}'_j = \boldsymbol{e}_j^T$ で置き換えたもので表されされます．このとき，A とその余因子行列 $\widetilde{A} = (A_{ij})^T$（余因子を成分とする行列の転置行列）の積を成分で考えると，行列式の性質から，直ちに $\widetilde{A}A = |A|I$ および $A\widetilde{A} = |A|I$ が導かれます．したがって，$|A| \neq 0$ のとき，$X = \widetilde{A}/|A|$ は $XA = AX = I$ を満たし，X は A の逆行列 A^{-1} となります．

【証明】n 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n), \qquad \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

を考えます．A の第 2 の表式は A が列ベクトルを並べて得られたとする見方です．もし，A が行ベクトルを並べて得られたと考えるならば

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}'_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

のように表すこともできます．

---

1) 【補足説明】定理：有限次数の正方行列 A に対して，$XA = I$（I は単位行列）を満たす行列 X が存在するとき，それは $AX = I$ を満たす．逆に，行列 X が $AX = I$ を満たすとき，それは $XA = I$ も満たす．（そのような行列 X を A の逆行列 A^{-1} という．逆行列は存在しない場合もある．$XA = I$ を満たす行列 X を A の**左逆行列**，$AX = I$ を満たす行列 X を A の**右逆行列**という．したがって，この定理は「左逆行列と右逆行列は，両者が存在するとき，それらは一致する」と言うことができる．実際の証明はそれらの存在証明を伴う．無限次元行列については，左逆行列・右逆行列が存在しても，それらが一致するとは限らない）．

さて，n 次行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ の $(i,\ j)$ 余因子 A_{ij}，つまり，行列式 $|A|$ の第 i 行と第 j 列を除いて得られる $n-1$ 次の小行列式 M_{ij} に符号因子 $(-1)^{i+j}$ をつけたものを考えましょう：

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

この余因子が A の逆行列の一部として用いられるわけですが，行列式 $|A|$ と比較してみると，変な符号因子が付くなど，奇妙な形をしています．以下，この余因子を左・右逆行列を導くのに相応しい形に変換しましょう．[2)]

ここで，行列式の変換に役立つ行列式の基本性質について述べておきます．

【行列式の性質】

① 行列式の 2 つの行（または列）を入れ換えると符号が変わる．

② 行列式の 1 つの行（または列）を c 倍すれば，行列式は c 倍される．

③ 2 つの行（または列）の等しい行列式は 0 である．

④ 行列式の 1 つの行（または列）の各成分が 2 つの数の和であるとき，行列式は和の各項をその行（または列）とする 2 つの行列式の和に等しい．

⑤ 行列式は 1 つの行（または列）を c 倍して他の行（または列）に加えても変わらない．

⑥（行列式の次数変更）n 次の正方行列 A と $n+1$ 次の単位行列 I を用意し，I の 2 行以下，2 列以下の成分を A の成分で置き換えた行列 A' を考えます．そのとき，行列式 $|A'|=|A|$：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{\Large A} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}=|A|.$$

ここで，A が 1 次のとき，つまり $A=(a)$ のとき，$|A|=a$ と定義します．すると，①～⑥を用いて任意の行列式の値が求められます．

---

2) 余因子そのものは逆行列を求める際には必然的に現れることを納得しておきましょう．例えば，n 元 1 次方程式の 2 通りの解法（行列を用いた解法とクラマーの公式など）を比較すれば簡単に分かります．参考書籍：『高校数学 + α　なっとくの線形代数』（共立出版）§6.3.3.3 高次行列の逆行列．その § の PDF：`http://www.h6.dion.ne.jp/~hsbook_a/senkei/Ainv.pdf`

それでは $(i,\ j)$ 余因子 A_{ij} の変換に移ります．まず，【行列式の性質】⑥（行列式の次数変更）より，余因子 A_{ij} は次の形で表されます：

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（余因子展開を知っている人は，第 1 列（または第 1 行）について展開してみれば元の形に戻ることが分かりますね．我々はその高級な展開公式を導くという立場で議論を進めています）．

次に，上の余因子の第 1 列を順次第 2 列，第 3 列，・・・，第 j 列 ($\boldsymbol{a}_{j-1}$ の列）と交換していくと，【行列式の性質】①より

$$A_{ij} = (-1)^{i+j+j-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & 0 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & 0 & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & 0 & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と変換されます．符号因子については，-1 の偶数乗は $+1$ なので，$(-1)^{i+j+j-1} = (-1)^{i-1}$ です．さらに，第 1 行を順次第 2 行，第 3 行，・・・，第 i 行 ($\boldsymbol{a}'_{i-1}$ の行）と交換していくと，①より，$(-1)^{i-1+i-1} = +1$ に注意して

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & 0 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & 0 & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & 0 & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

の形に変換できます．ここで，符号因子が消滅したことに注意しましょう．

もう少し変換を続けます．今度は⑤を利用して，

（ア）上の行列式の j 列に，a_{i1} を掛けて第 1 列に加える，a_{i2} を掛けて第 2 列に加える，・・・，a_{ik} を掛けて第 k 列（$k \neq j$）に加えるのを繰り返します．または,

（イ）上の行列式の i 行に，a_{1j} を掛けて第 1 行に加える，a_{2j} を掛けて第 2 行に加える，・・・，a_{kj} を掛けて第 k 行（$k \neq i$）に加えるのを繰り返します.

すると，A の $(i,\ j)$ 余因子 A_{ij} は $|A|$ により近い形で 2 通りに表されます：

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & 0 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & 0 & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i\,j-1} & 1 & a_{i\,j+1} & \cdots & a_{i\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & 0 & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad 【(i,\ j)\ \text{左余因子}】$$

$$= |\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j-1}\ \boldsymbol{e}_i\ \boldsymbol{a}_{j+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\,|, \qquad \boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\ \text{行},$$

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1j} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad 【(i,\ j)\ \text{右余因子}】$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{i-1} \\ \boldsymbol{e}'_j \\ \boldsymbol{a}'_{i;1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_n \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}'_j = \begin{array}{ccccc} & & j\,\text{列} & & \\ & & \downarrow & & \\ (0 & \cdots & 1 & \cdots & 0) \end{array} = \boldsymbol{e}_j^T\,.$$

A_{ij} に対する上の表現を，それぞれ，A の $(i,\ j)$ **左余因子**，$(i,\ j)$ **右余因子**と呼びましょう.

これで準備が整いました．左・右余因子と $A=(a_{ij})$ の成分との積およびそれらの和を考えると逆行列についての直接の議論ができます．

まず，左逆行列です．A_{ki} の左余因子表現を用います．

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left| \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{i-1} \ \boldsymbol{e}_k \ \boldsymbol{a}_{i+1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \right| a_{kj}$$

ここで【行列式の性質】②と④を用い，また

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\,\boldsymbol{e}_k = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (\leftarrow k \text{ 行}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_j$$

に注意すると，

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left| \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{i-1} \ \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{e}_k \ \boldsymbol{a}_{i+1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \right| = \left| \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{i-1} \ \boldsymbol{a}_j \ \boldsymbol{a}_{i+1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \right|$$

が得られます．上式の右辺は行列式 $|A| = |\,\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{i-1} \ \boldsymbol{a}_i \ \boldsymbol{a}_{i+1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\,|$ の $\boldsymbol{a}_i$ 列が $\boldsymbol{a}_j$ 列で置き換わっています．したがって，③に注意すると，（ア）$j \neq i$ のときは $\boldsymbol{a}_j$ となる列が 2 つあるので 0 になり，（イ）$j = i$ のときは $|A|$ そのものになります：

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = |A|\,\delta_{ij}\,, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

（$i = j$ のとき，$|A|$ の j 列についての**余因子展開**といいます．）上式を行列の積の形に書きましょう．A_{ij} を成分とする行列の転置行列を **余因子行列** $\widetilde{A}$ といいましょう：

$$\widetilde{A} = (A_{ij})^T \qquad \text{【余因子行列】}$$

すると，

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\widetilde{A})_{ik}a_{kj} = \left(\widetilde{A}A\right)_{ij} = |A|\,\delta_{ij}$$

すなわち，

$$\widetilde{A}A = |A|\,I \qquad (I \text{ は } n \text{ 次の単位行列})$$

が成り立ちます．したがって，$\widetilde{A}/|A|$（$|A| \neq 0$）は A の左逆行列になります．

次に右逆行列です．$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$ の A_{jk} に右余因子表現を用いましょう．すると，先ほどと同様の議論によって

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{j-1} \\ \boldsymbol{e}'_k \\ \boldsymbol{a}'_{j+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{j-1} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{e}'_k \\ \boldsymbol{a}'_{j+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{j-1} \\ \boldsymbol{a}'_i \\ \boldsymbol{a}'_{j+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_n \end{vmatrix} = |A|\delta_{ij}$$

が成り立ちます．確かめよう．上式は余因子行列を用いて

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\widetilde{A})_{kj} = |A|\delta_{ij} \iff A\widetilde{A} = |A|I$$

が成り立ち，$\widetilde{A}/|A|$（$|A| \neq 0$）は右逆行列でもあります．（上式で，$j = i$ のとき，$|A|$ の第 i 行についての余因子展開です）．

以上の議論から，$|A| \neq 0$ のとき，$X = \widetilde{A}/|A|$ に対して

$$XA = I \iff AX = I$$

が成り立ち，X は A の逆行列 A^{-1} です．[3)]

最後に左逆行列と右逆行列が存在すればそれらは一致し，したがって，逆行列はただ 1 通りに定まることを示しましょう．X は A の左逆行列，Y は A の右逆行列だとすると，

$$XA = I, \quad AY = I\,.$$

このとき，行列の積の結合則 $(AB)C = A(BC)$ と単位行列の性質 $IA = AI = A$ より，

$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y.$$

よって，$X = Y$，したがって，$XA = AX = I$ が成り立ちます．このとき，$YA = AY = I$ を満たす Y が在れば，同様にして $X = Y$．以上のことから，有限次元の正方行列 A に対して，$XA = I$ または $AX = I$ を満たす X は A の唯一の逆行列であることが保証されます．

[3)] 行列式に精通した人は，例えば，齋藤雅彦 著『線形代数入門』（東京大学出版会）§3 の簡潔な議論を薦めます．また，我々の立場の議論に興味がある人は 長谷川浩二 著『線型代数 – – –Linear Algebra』（日本評論社）§11.3 をどうぞ．